

# LOGARITHMES DE BASE a

$$(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$$

Rappelons la définition du logarithme de base a  
( $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ) d'un nombre  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

1

## DEFINITION. CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

Si l'on prend le logarithme naturel des deux membres de cette dernière égalité, on obtient :

$$\ln x = y \ln a \quad \text{d'où} \quad y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Ainsi

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

La fonction  $\log_a$  est égale au produit de la fonction  $\ln$  par la constante  $\frac{1}{\ln a}$ .

Si l'on prend le cas particulier  $a = e$ , on obtient :

$$\log_e x = \ln x.$$

Cela signifie que la fonction "logarithme naturel" introduite au §1 est bien une fonction "logarithme" du type vu précédemment (cours d'algèbre) ; c'est la fonction logarithme de base e.

### Remarque

Dans le cas particulier où  $a = 10$ , on a :

$$\log_{10} x = \frac{1}{\ln 10} \ln x = \frac{1}{2,3026\dots} \ln x = 0,4343\dots \ln x$$

$$\text{et} \quad \ln x = 2,3026\dots \log_{10} x.$$

1)  $\log_a a = 1$

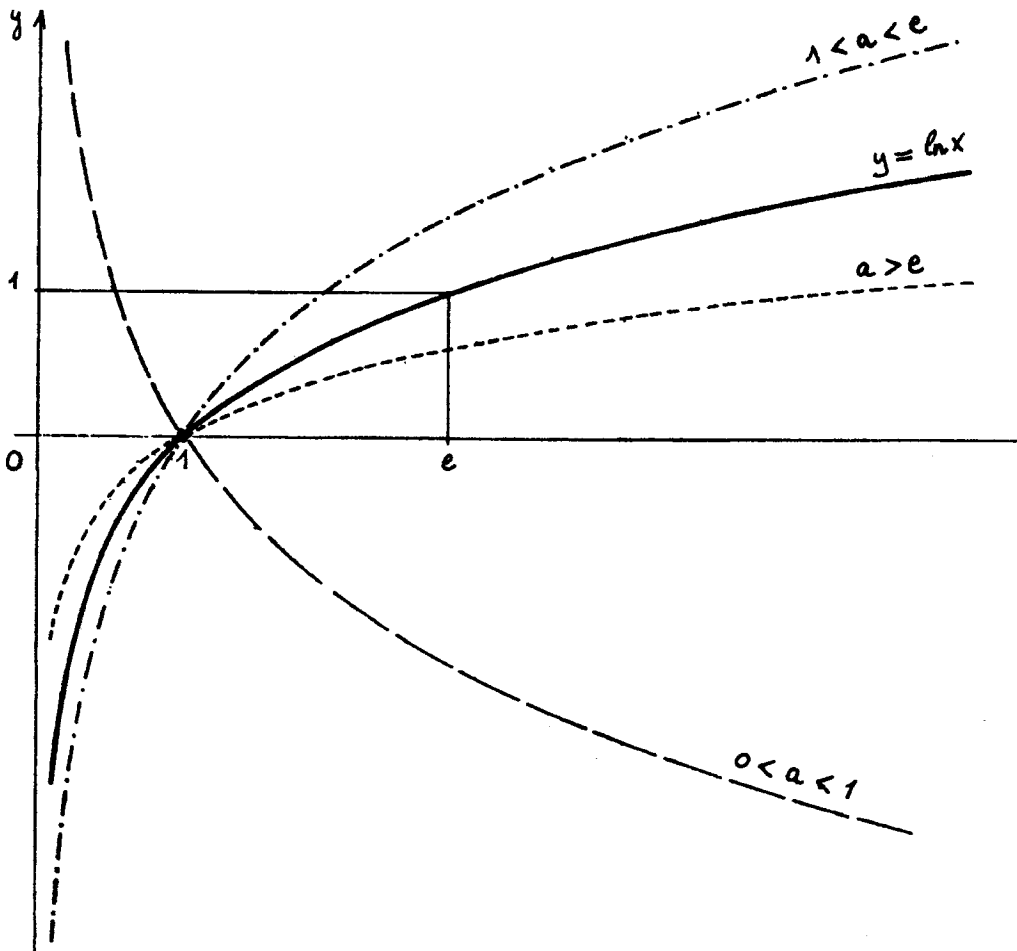
2)  $\log_a 1 = 0$

3)  $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$  ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

4)  $\log_a (x^n) = n \log_a x$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  ,  $n \in \mathbb{R}$

REPRESENTATION GRAPHIQUE

La fonction  $\log_a$  étant égale à  $\frac{1}{\ln a} \ln$  , sa courbe représentative s'obtient à partir de celle de la fonction  $\ln$  en transformant celle-ci par une affinité orthogonale d'axe  $Ox$  et de rapport  $\frac{1}{\ln a}$  .



La courbe occupe des positions différentes par rapport à la courbe  $y = \ln x$  suivant la valeur de  $a$  :

$$\begin{array}{lll} 1^{\text{er}} \text{ cas} & a > e & \implies 0 < \frac{1}{\ln a} < 1 \\ 2^{\text{e}} \text{ cas} & 1 < a < e & \implies \frac{1}{\ln a} > 1 \\ 3^{\text{e}} \text{ cas} & 0 < a < 1 & \implies \frac{1}{\ln a} < 0 \end{array}$$

On aurait aussi pu étudier pour elle-même la fonction  $\log_a$ . Sa dérivée, en particulier, est donnée par

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

#### 4

#### EXERCICES

1) Calculer les dérivées des fonctions données par :

a)  $f(x) = \log_2(2x+3)$

b)  $f(x) = \log_3(x^2-2x+1)$

c)  $f(x) = \log_2 \sqrt{2x^2-8}$

2) Calculer :

a)  $\int_2^3 \frac{dx}{(2x+1) \ln 4}$

b)  $\int_{3/2}^2 \frac{(x^2-1) dx}{(x^3-3x) \ln(\frac{1}{2})}$

3) Etudier les fonctions de l'exercice 1.

# FONCTION EXPONENTIELLE

## DE BASE a ( a $\in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ )

1

### DEFINITION. DERIVEE

Rappelons que la fonction  $\exp_a$  est la réciproque de la fonction  $\log_a$  :

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* & ( a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} ) ; \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

on peut encore écrire

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} .$$

On calcule alors facilement :

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x ,$$

d'où les résultats :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

,

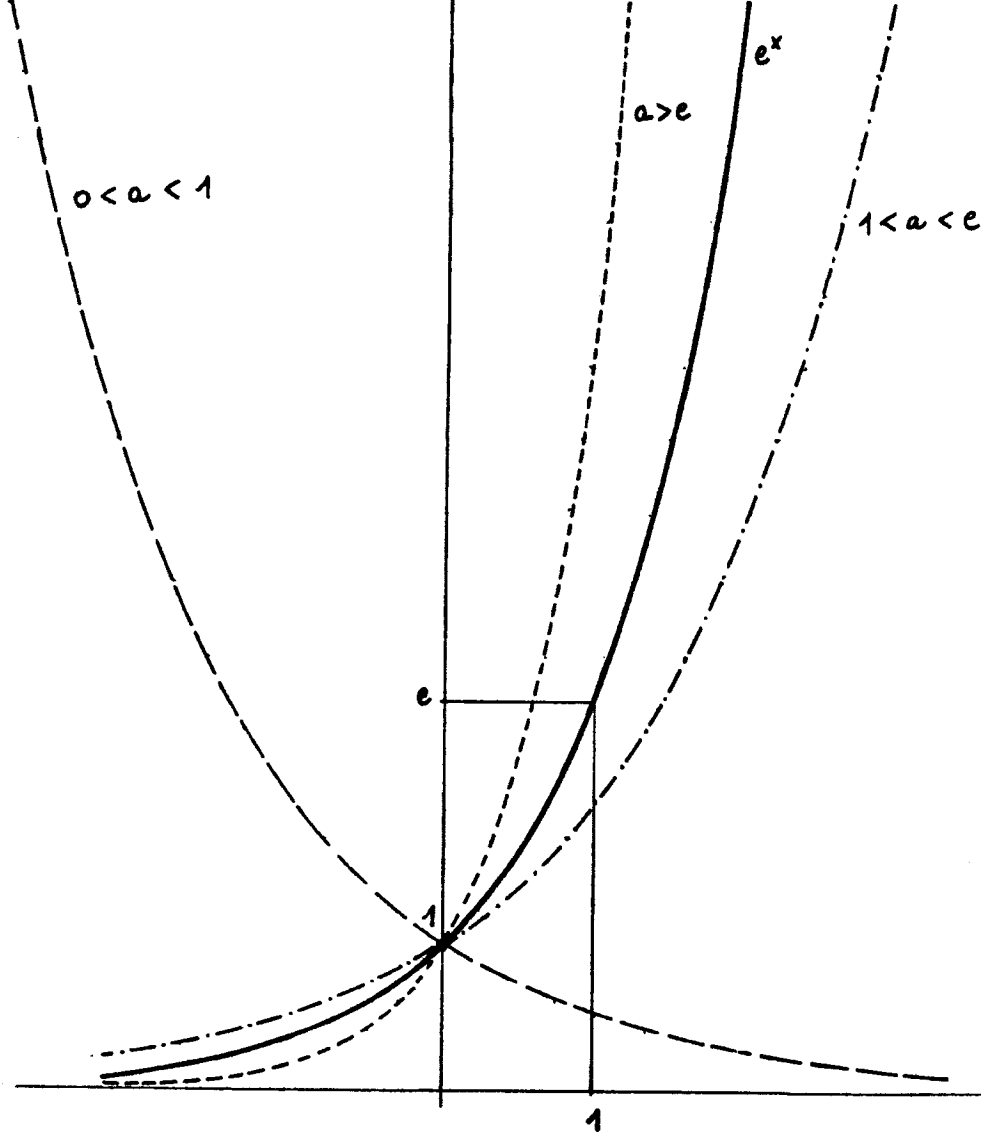
$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

2

### REPRESENTATION GRAPHIQUE

La courbe représentative de la fonction  $\exp_a$  est symétrique de celle de  $\log_a$  relativement à la première bissectrice des axes.

En distinguant les mêmes cas qu'en 3.3 , on a les figurations suivantes :



Les limites calculées au §2 nous permettent d'écrire  
immédiatement :

$$\text{si } a > 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\text{si } 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

## EXERCICES

1) Calculer la dérivée des fonctions données par :

a)  $f(x) = a^{x^2+3x}$

b)  $f(x) = a^{\cos x}$

c)  $f(x) = a^{\frac{x}{x+2}}$

d)  $f(x) = a^{\ln x}$

2) Une colonie de bactéries se développe dans le temps de la manière suivante : chaque fois que le temps augmente de 10 secondes, le nombre des bactéries devient deux fois plus grand. Exprimer la population de la colonie en fonction du temps, connaissant la population initiale  $b$ . En appelant "natalité" le nombre de naissance pendant l'unité de temps, calculer en combien de temps la natalité devient 5 fois plus élevée qu'au temps 0.

3) Durant chaque période de temps égale à  $T$  années, la moitié des atomes d'une matière radio-active se désintègre. Connaissant la masse  $m(0) = b$  au temps initial 0, exprimer la masse restante  $m(t)$  en fonction du temps  $t$ . En admettant que l'intensité du rayonnement est à chaque instant proportionnelle au nombre d'atomes désintégrés en 1 seconde, calculer le temps nécessaire pour que l'intensité se réduise au dixième de l'intensité initiale.

4) Un flux radio-actif de mesure  $b$  aborde un écran. Sachant que chaque fois qu'il a traversé une épaisseur  $a$  de l'écran, il devient 3 fois plus petit, établir l'expression donnant la mesure du flux en fonction de l'épaisseur  $x$  traversée.

5) En première approximation, la pression atmosphérique diminue de moitié pour chaque élévation de 5500 m. Donner l'expression de l'altitude en fonction de la pression atmosphérique  $x$  sachant que celle au niveau de la mer est 76 cm Hg.